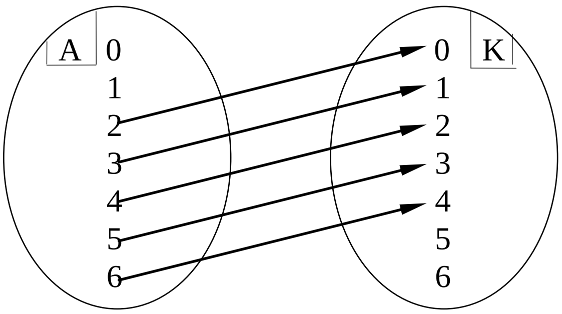
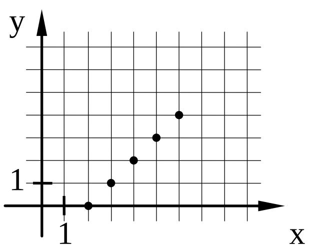
Halmazok, relációk

(1) Alapfogalmak: halmaz, hozzárendelés (reláció), elem, eleme.
Halmaz megadható, elemeinek
– jellemző tulajdonságával
pl. A := {a 8/a osztály azon tagjai, akik tavaly év végén 5-t kaptak}
B := {pozitív egész számok}
– elemeinek felsorolásával
(a 8/a osztály tagjainak tavaly évvégi osztályzatai)
pl. A := {Földi István, Török Ildikó…}
B := {1; 2; 3; 4; 5 ...} (nem az összes elemét soroltuk fel, viszont *egyértelműen* kikövetkeztethető az összes többi)
– összefüggéssel, szabállyal (számhalmazok)
pl. $B := \{\, x > 0 \mid x \in N \,\}$ ($x \in N$ jelentése: x eleme a természetes számoknak)

(2) Hozzárendelés (reláció): halmazok közötti kapcsolat
(a) Az "A" halmaz elemeihez hozzárendeljük a "B" halmazból, a nála kettővel kisebb számot





A eleme	0	1	2	3	4	5	6
K eleme			0	1	2	3	4

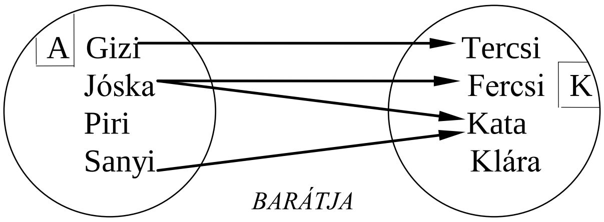
$A \to K; \quad x \mapsto x-2$

Hozzárendelés megadható:
– nyíldiagrammal
– grafikonnal (koordináta-rendszerben)
– táblázattal
– szabállyal

(b) "A" elemei ⟶ "K" elemei
("A" elemeihez rendeltük a "K" elemeit)
"A" halmaz: *alaphalmaz*
"K" halmaz: *képhalmaz*
$A \to B; \quad x \mapsto x-2$
pl. $3 \mapsto 1$ (az 1 a 3 *képe*, a 3 az 1 *őse*)

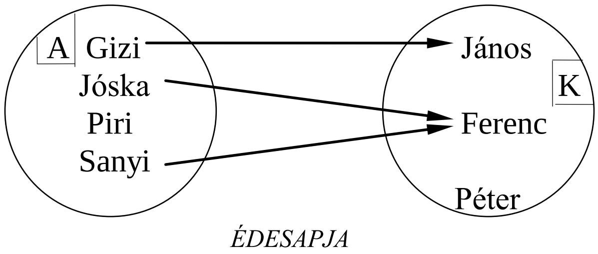
(3) Vizsgáljuk meg a következő két hozzárendelést!

(a)



Az "A" halmaznak (alaphalmaznak) van olyan eleme, amelynek **több képe** van (Jóskának) a "K" halmazban. Az ilyen hozzárendeléseket **többértelmű hozzárendeléseknek** nevezzük.

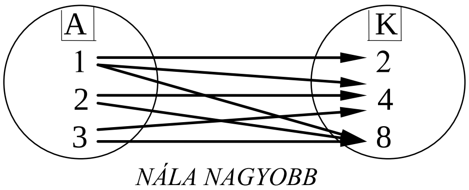
(b)



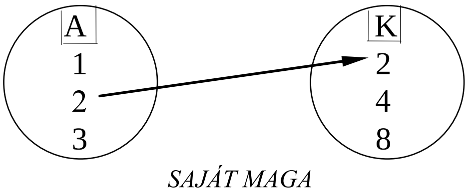
Gizi képe (édesapja) János
Jóska képe (édesapja) Ferenc
Pirinek nincs képe a B halmazban
(Piri édesapja nincs a B halmazban)
Sanyi képe (édesapja) Ferenc

Az "A" halmazban (alaphalmazban) minden elemnek **legfeljebb egy** (egy vagy egy sem) képe van a "K" halmazban. Az ilyen hozzárendeléseket **egyértelmű hozzárendeléseknek** nevezzük.

(4) Példafeladatok:



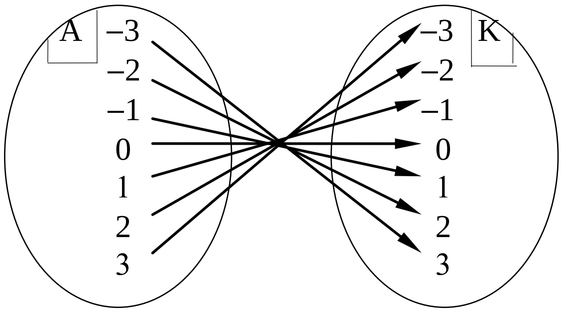
Többértelmű hozzárendelés



Egyértelmű hozzárendelés

(5) Vizsgáljuk meg a következő két hozzárendelést!

(a)



$A \to K; \quad x \mapsto -x$

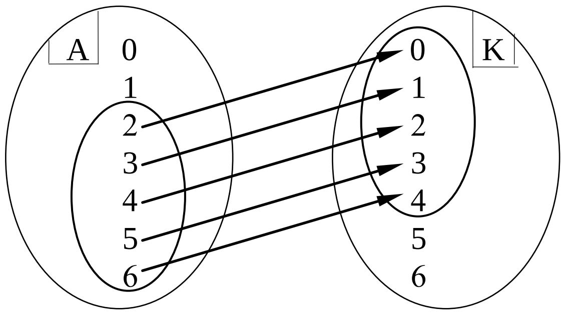
Vegyük észre, hogy

– *egyértelmű* hozzárendelés
– az "A"-beli elemeknek *pontosan egy képe* van
– *minden* "A"-beli elemnek van képe
– minden "B"-beli elemnek van őse

$\Downarrow$

FÜGGVÉNY

(b)



A fenti feltételek csak

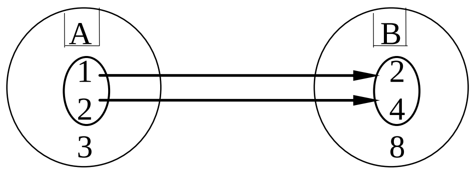
az "A" és "B" két *részhalmazára*

teljesülnek.

$A \to B; \quad x \mapsto x - 2$

A függvény olyan **egyértelmű** hozzárendelés, ami az alaphalmaz vagy annak egy – nem üres – részhalmazának **minden** eleméhez **pontosan egy** elemet rendel a kép-halmazból vagy annak egy – nem üres – részhalmazából.
Az alaphalmaznak azt a nem üres részhalmazát, amelyen a függvényt értelmezzük, **értelmezési tartománynak**, azok elemeit pedig **független változóknak** nevezzük. Jele: x.
A független változókhoz rendelt képelemek, a *függvényértékek*. Jele: y vagy $f(x)$. A függvényértékek halmaza az *értékkészlet*.

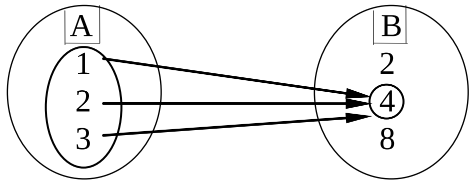
(6) Példafeladatok:
(a)



$A \to B; \; x \mapsto 2x$

"A" és "B" halmazon értelmezve a hozzárendelés csupán egyértelmű, de nem függvény. Azonban mindkét halmaznak van olyan részhalmaza, amelyen a hozzárendelés már függvényként értelmez-hető. Értelmezési tartomány = {1; 2}. Értékkészlet = {2; 4}.

(b)



$A \to B; \; x \mapsto 4$

"A" és "B" halmazon egyértelmű hozzárendelés, függvényként a jelölt részhalmazokon értelmez-hető. Értelmezési tartomány = alaphalmaz ("A"). Értékkészlet = {4}.